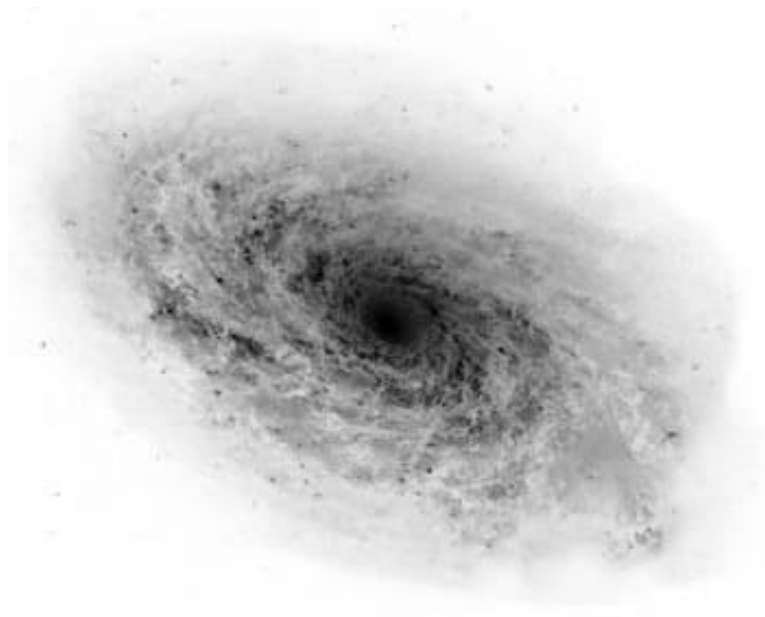


Model for udvikling af metaller i en spiralgalakse

Peter Laursen
240675-2987
Sundevedsgade 22, 1.th
1751 Kbh. V
Øvelseshold 4

20. december 2002



Indhold

1	Indledning	5
2	Teori	5
2.1	Antagelser	5
2.2	Differentialligningerne	5
2.3	Integration af ligningssystemet	6
2.4	Projektets formål	6
2.5	Konstanter og begyndelsesbetingelser	6
3	Programmets kildetekst	7
3.1	Program	7
3.2	Brugervejledning	10
3.3	Scripts til Gnuplot	11
3.3.1	$\log(\rho)$ som funktion af r	11
3.3.2	$\log(\xi)$ som funktion af r	12
3.3.3	Z som funktion af t	12
3.3.4	Fordeling af stjerner som funktion af Z	13
4	Resultater	13
5	Afsluttende bemærkninger.	16
6	Vittighed	16

1 Indledning

En af teorierne for dannelse af spiralgalakser går på, at galakser dannes af store gasskyer, oprindeligt bestående af brint og helium. Disse skyer falder sammen under deres eget gravitationsfelt, og samtidig dannes der stjerner af gassen. De første generationer af stjerner dannes i en sfærisk halo. Den resterende del af gassen falder sammen til en flad, roterende skive.

Formålet med denne afhandling er at opstille en model, der kan forudsige udviklingen i gasskiven; hvordan gassen langsomt omdannes til stjerner samtidig med, at indholdet af metaller¹ øges. Udviklingen beregnes numerisk vha. et program skrevet i Fortran.

2 Teori

2.1 Antagelser

Efterhånden som gasskyen falder sammen, vokser densiteten ρ af gassen. Den hastighed ξ , hvormed stjernerne dannes, afhænger af ρ i en potens $n \in [1.5 - 2]$, samt af afstanden r til galaksens centrum således, at

$$\xi = Cr^{-1/2}\rho^n, \quad (1)$$

hvor C er en konstant.

I denne model inddeles stjerner i to kategorier; lette stjerner, med masser mindre end Solens masse M_\odot , samt tungere stjerner.

Af de nydannede stjerner vil en del α være lette. Disse stjerner har en levetid, der er længere end eller sammenlignelig med galaksens alder. De vil derfor ikke bidrage til den videre udvikling af galaksen, men kan antages at gå permanent over i galaksens stellarkomponent.

Resten, dvs $1 - \alpha$, bliver til tunge stjerner, hvis levetid er så kort, at vi i denne model kan regne med, at de dør umiddelbart efter deres dannelse. De vil da sende en del β tilbage til det interstellare stof, mens resten ender sine dage som fossiler (hvide dværge, neutronstjerner og sorte huller), der heller ikke bidrager til galaksens videre udvikling.

Af det stof, der sendes tilbage, vil en del γ bestå af metaller, dannet i stjernernes indre og – især – under supernovaudbrud.

2.2 Differentialligningerne

Idet vi regner med, at alle lette stjerner lever evigt, mens alle tunge stjerner dør en grusom barnedød, gælder der for stjernernes massetæthed S , at

$$\frac{dS}{dt} = \xi\alpha. \quad (2)$$

¹Metaller betyder her alt andet end brint og helium.

Gastætheden vil falde som følge af den del, der bliver til stjerner, men stiger som følge af den del $(1 - \alpha)\beta$, der kastes tilbage ved de tunge stjerners død. Dvs., at

$$\frac{d\rho}{dt} = -\xi + \xi(1 - \alpha)\beta. \quad (3)$$

Det relative indhold Z af metaller i gassen (og i de nydannede stjerner) beregnes ved først at beregne densiteten $Z\rho$ af metallerne og dernæst dividere med ρ . $Z\rho$ falder pga. den del, der bliver til lette stjerner, men stiger pga. den del $(1 - \alpha)\beta\gamma$, der kastes tilbage som metaller, samt den del $(1 - \alpha)\beta(1 - \gamma)Z$, der har akkumuleret metaller gennem tiden. Dvs., at

$$\begin{aligned} \frac{d(Z\rho)}{dt} &= -\xi + \xi(1 - \alpha)\beta\gamma + \xi(1 - \alpha)\beta(1 - \gamma)Z \\ &= -\xi + \xi(1 - \alpha)\beta[\gamma + (1 - \gamma)Z] \end{aligned} \quad (4)$$

2.3 Integration af ligningssystemet

Ovenstående koblede differentiaalligningssystem løses vha. Eulers metode, der benytter, at for en funktion $f = f(t)$ er

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &\approx \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \Leftrightarrow \\ f(t + \Delta t) &\approx f(t) + \Delta t \frac{df}{dt}, \end{aligned} \quad (5)$$

for passende små tidsskridt Δt . Løsningen kan således regnes et tidsskridt frem ad gangen. Metoden er dog kun førsteordens-nøjagtig, og kræver derfor ret små tidsskridt for at være stabil. Heldigvis har vi en computer til det hårde arbejde.

2.4 Projektets formål

Modellen fremskrives 15 milliarder år. Det ønskes undersøgt, hvorledes gastætheden i planen ændrer sig i tiden i forskellige afstande fra galaksens centrum, samt hvor i galaksens plan stjernedannelsen foregår i forskellige stadier af udviklingen. Desuden beregnes i Solens afstand fra galaksens centrum, hvordan andelen af metaller vokser med tiden, samt hvilken fordeling af stjernernes metalindhold man kan forvente efter ti milliarder års udvikling.

2.5 Konstanter og begyndelsesbetingelser

Til tiden $t = 0$ antages, at $S = Z = 0$, samt at $\rho = Ar^{-2}$, hvor A er en konstant.

I denne løsning har de anvendte konstanter følgende værdier:

$$n = 2;$$


```

write (*,*) "Dette program beregner udviklingen af en galakse; hvordan"
write (*,*) "stjernerne dannes og m{\ae}ngden af metaller {\o}ges."

write (*,'(a)',advance='no') "Vil du se de forskellige parametres &
&default-v{\ae}rdier (j/n)? "

read*, svar1
if (svar1=='j' .or. svar1=='J') call DEFAULT

write (*,'(a)',advance='no') "Vil du {\ae}ndre v{\ae}rdierne (j/n)? "
read*, svar2
if (svar2=='j' .or. svar2=='J') call CHANGE(C, n, A, alfa, beta, gamma)

write (*,'(a)',advance='no') "Angiv tidspunkt i My, du vil fremskrive &
&systemet til: "

read*, t

dt=.1

Rtidsskridt=t/dt
Itidsskridt=NINT(Rtidsskridt)

do r=1,12

rho = A/(REAL(r)**2.0)
S = 0
Zrho = 0
Z = 0
tid = 0

do i=0,Itidsskridt
call FREMSKRIV(rho, S, Zrho, Z, alfa, beta, gamma, dt, C, r, n)

if (MOD(i,10000)==0) then
u=i/10000+1
write (u,'(i2,2e15.6)') r, rho, KSI(C, r, rho, n)
endif

tid=tid+dt
if (MOD(i,10000)==0 .and. r==8) then
write (88,'(2f15.6)') i*dt, Z
endif

if (r==8 .and. i<=100000) then
do j=1,10
if (Z>=(j-1)*0.005 .and. Z<j*0.005) then
Zarr(j)=Zarr(j)+KSI(C, r, rho, n)*alfa*dt
endif
enddo
endif

enddo
print '( "I radius ",i2," kpc er rho =" ,e10.3, ", S =" ,e10.3, &
&" og Z =" ,e10.3)',r,rho,S,Z

enddo

do k=1,10
write(77,'(f5.3,x,f8.4)') k*0.005-0.0025, 100*Zarr(k)/SUM(Zarr)
enddo

do fil=1,99
CLOSE(fil)
enddo

```

```

!Introduktion
!
!
!Mulighed for at se
!og {\ae}ndre parameter-
!v{\ae}rdier
!
!
!
!St{\o}rrelsen af tids-
!skridt i My
!Beregn antal tidsskridt
!Lav til naturligt tal

!Beregn for forskel-
!lige radier
!
!Initialv{\ae}rdier
!

!Fremskriv til tiden t

!
!Skriv r, rho og ksi
!for hvert Gy
!

!Skriv tid og Z i
!Solens afstand
!

!For Solens omegn
!efter 10 Gy:
!Beregn fordeling af
!stjernernes Z-indhold
!
!

!Skriv ogs{\aa} resultat
!p{\aa} sk{\ae}rmen

!Skriv Z-fordeling
!til fil
!

!
!Luk alle filer
!
```

```

end

!-----
!UDSKRIV DEFAULT-V{\AE}RDIER

subroutine DEFAULT
implicit none

write (*,*) "Stjernedannelsesraten er  $KSI = C r^{(-1/2)} \rho^n$ , hvor"
write (*,*) "C = 0.0071 M_sol pc My kpc^{(-1/2)},"
write (*,*) "n = 2, og"
write (*,*) "rho(r) = A r, hvor"
write (*,*) "A = 9.6 M_sol kpc pc."
write (*,*) "Andelen af stjerner med  $M < M_{sol}$  er  $\alpha = 0.70$ ."
write (*,*) "Andelen af de resterende  $1 - \alpha$ , der kan genbruges, &
&er  $\beta = 0.60$ ."
write (*,*) "Andelen heraf, der best{\aa}r af metaller, er  $\gamma = 0.10$ ."

end subroutine DEFAULT

!-----
!{\AE}NDRING AF DEFAULT-V{\AE}RDIER

subroutine CHANGE(C, n, A, alfa, beta, gamma)
implicit none

real, intent(out):: C, n, A, alfa, beta, gamma

write (*,'(a)',advance='no') "Angiv C i kpc^{1/2} pc M_sol My: "
read*, C
write (*,'(a)',advance='no') "Angiv n skal ligge mellem 1.5 og 2: "
read*, n
write (*,'(a)',advance='no') "Angiv A: "
read*, A
write (*,'(a)',advance='no') "Angiv alfa: "
read*, alfa
write (*,'(a)',advance='no') "Angiv beta: "
read*, beta
write (*,'(a)',advance='no') "Angiv gamma: "
read*, gamma

end subroutine CHANGE

!-----
!FREMSKRIVNING T TIDSSKRIDT

subroutine FREMSKRIV(rho, S, Zrho, Z, alfa, beta, gamma, dt, C, r, n)
implicit none

real, intent(inout):: rho, S, Zrho, Z
real, intent(in) :: alfa, beta, gamma, dt, C, r, n
real :: xinu, KSI

xinu=KSI(C, r, rho, n)

rho = rho+(-xinu+xinu*(1-alfa)*beta)*dt
S = S+xinu*alfa*dt
Zrho = Zrho+(-xinu*Z+xinu*(1-alfa)*beta*(gamma+(1-gamma)*Z))*dt
Z = Zrho/rho

end subroutine FREMSKRIV

```

```

!-----
                                !KSI

real function KSI (C, r, rho, n)

    real:: C, rho, n
    integer:: r

    KSI = C/((REAL(r))**(0.5))*rho**n

end function KSI

!-----

```

3.2 Brugervejledning

Efter definerings af tekst-, heltals- og reelle variable åbnes 18 filer. De første 16 er til at skrive data på for hver gang, der er gået 1 000 My. Da disse filer indgår i en løkke, er det vigtigt, at deres unit numbers er fortløbende. Den næste fil er til at skrive data på for, hvordan Z vokser med tiden i Solens omegn, dvs. ved $r = 8$ kpc, og den sidste til opsamling af data for fordelingen af stjernernes Z -indhold i Solens omegn efter 10 000 My. Alle filerne får `status = 'replace'` således, at de får nye værdier, hver gang man kører programmet, `iostat = ios` så programmet ikke crasher, hvis der går noget galt, samt `action = 'write'`, da der udelukkende skal skrives på filerne. Det oprettede 1×10 -array `Zarr` skal bruges til at opsamle antallet af stjerner i de givne Z -intervaller. I begyndelsen har de naturligvis alle værdien 0; derfor denne løkke.

Alle konstanter initialiseres, og der skrives en kort introduktion til programmet ud på skærmen. Derefter får brugeren mulighed for både at se og ændre disse default-værdier. Dette foregår vha. to subrutiner, `DEFAULT` og `CHANGE` der defineres efter af programmet (beskrives tilsidst). Endelig skal brugeren angive, hvor lang tid, han vil fremskrive systemet.

Størrelsen af tidsskridtene er fastsat til 0.1 My. Vil man ændre dette, er man nødt til at gå ind i programmet. Man skal hr blot huske også at ændre den værdi længere nede i programmet, der sørger for, hvornår der skrives til filerne; eftersom der skrives for hvert Gy, skal den have værdien $1000 \text{ My}/\Delta t$.

Herefter udregnes antallet af tidsskridt, og tallet konverteres til et naturligt tal, da det skal bruges som den efterfølgende løkkes tællers maksimalværdi. Nu begynder beregningerne så. Den yderste løkke bevirker, at de ønskede værdier fås for $r = 1, 2, \dots, 12$ kpc. Variablene initialiseres, og en ny løkke fremskriver disses værdier et tidsskridt ad gangen vha. subrutinen `FREMSKRIV`. Hvis tidsskridtet kan divideres med 10 000, altså for hvert Gy, skrives på filen svarende til dette tidspunkt de aktuelle værdier for r , ρ og ξ (der er

defineret som en function efter programmet). Dette bevirker filerne 1-16 til sidst består hver af tre søjler med de nævnte værdier med en række for hver værdi af r , hvilket er smart, når vi skal bruge dataene til at tegne grafer.

Hvis tidsskridtet kan divideres med 10 000 og $r = 8$ kpc, skrives $i*dt$, dvs. den tid, løkken er nået til, samt Z på filen 'Zvedsol', der altså ender med at bestå af to søjler; n række for hvert Gy.

Hvis $r = 8$ startes en ny løkke, der undersøger, hvilken værdi Z har og putter det ned i den tilsvarende boks i arrayet. Hvert element i arrayet ender altså med at have opsummeret mængden af stjerner med et Z -indhold, der ligger i det tilsvarende interval. Dette fortsætter, indtil løkkens tæller er 100 000, dvs. indtil $t = 10$ Gy.

Inden den yderste løkke afsluttes, skrives de endelige værdier for ρ , S , og ξ for hver værdi af r .

Bagefter skrives på filen 'Zfordel' for hvert interval dets værdi, samt mængden af stjerner tilhørende dette interval i procent af den samlede mængde. Til sidst lukkes alle filer.

Efter programmet kommer først subroutinen DEFAULT, der blot skriver konstanternes værdier ud på skærmen, efterfulgt af CHANGE, der indlæser brugerdefinerede værdier i stedet for default-værdierne. Dernæst kommer FREMSKRIV, der indeholder de i afsnit 2.2 fremsatte differentiaalligninger, fremskrevet vha. Lign. (5). Til sidst defineres funktionen ξ som en function KSI. Læg mærke til, at r opløftes til 0.5 i stedet for 1/2, da Fortran ikke er i stand til at tænke selv.

3.3 Scripts til Gnuplot

Der ønskes fire forskellige grafer

- $\log(\rho)$ som funktion af r , for hver 1 000 My
- $\log(\xi)$ som funktion af r , for hver 1 000 My
- Z som funktion af t , for $r = 8$ kpc
- Den procentuelle fordeling af stjernernes Z -indhold som funktion af Z for $r = 8$ kpc og $t = 10\,000$ My

Alle scriptsne (ubehageligt ord) starter med at resette (ikke meget bedre) tidligere Gnuplotkommandoer, hvorefter de to akser tildeles en titel. Dernæst følger dt, der skal afbildes, og til sidst laves grafen til en eps-fil.

3.3.1 $\log(\rho)$ som funktion af r

```
reset
set xlabel 'r/[kpc]'
set ylabel '{/Symbol r}/[M_{sol} pc^{-3}]'
set data style lines
```

```

plot "start" u 1:(log($2)) t 't = 0', \
"1000My" u 1:(log($2)) t 't = 1000 My', \
"2000My" u 1:(log($2)) t 't = 2000 My', \
"3000My" u 1:(log($2)) t 't = 3000 My', \
"4000My" u 1:(log($2)) t 't = 4000 My', \
"5000My" u 1:(log($2)) t 't = 5000 My', \
"6000My" u 1:(log($2)) t 't = 6000 My', \
"7000My" u 1:(log($2)) t 't = 7000 My', \
"8000My" u 1:(log($2)) t 't = 8000 My', \
"9000My" u 1:(log($2)) t 't = 9000 My', \
"10000My" u 1:(log($2)) t 't = 10000 My', \
"11000My" u 1:(log($2)) t 't = 11000 My', \
"12000My" u 1:(log($2)) t 't = 12000 My', \
"13000My" u 1:(log($2)) t 't = 13000 My', \
"14000My" u 1:(log($2)) t 't = 14000 My', \
"15000My" u 1:(log($2)) t 't = 15000 My'

set terminal postscript eps enhanced
set output "r_logrho.eps"
replot
set terminal x11

```

3.3.2 $\log(\xi)$ som funktion af r

```

reset
set xlabel 'r/[kpc]'
set ylabel 'log({/Symbol x})/[M_{sol} My^{-1} pc^{-3}]'
set data style lines

plot "start" u 1:(log($3)) t 't = 0', \
"1000My" u 1:(log($3)) t 't = 1000 My', \
"2000My" u 1:(log($3)) t 't = 2000 My', \
"3000My" u 1:(log($3)) t 't = 3000 My', \
"4000My" u 1:(log($3)) t 't = 4000 My', \
"5000My" u 1:(log($3)) t 't = 5000 My', \
"6000My" u 1:(log($3)) t 't = 6000 My', \
"7000My" u 1:(log($3)) t 't = 7000 My', \
"8000My" u 1:(log($3)) t 't = 8000 My', \
"9000My" u 1:(log($3)) t 't = 9000 My', \
"10000My" u 1:(log($3)) t 't = 10000 My', \
"11000My" u 1:(log($3)) t 't = 11000 My', \
"12000My" u 1:(log($3)) t 't = 12000 My', \
"13000My" u 1:(log($3)) t 't = 13000 My', \
"14000My" u 1:(log($3)) t 't = 14000 My', \
"15000My" u 1:(log($3)) t 't = 15000 My'

set terminal postscript eps enhanced
set output "r_logksi.eps"
replot
set terminal x11

```

3.3.3 Z som funktion af t

```

reset
set xlabel 't/[My]'
set ylabel 'Z'
set data style lines

```

```

plot "Zvedsol" u 1:2 w lines

set terminal postscript eps enhanced
set output "t_Z.eps"
replot
set terminal x11

```

3.3.4 Fordeling af stjerner som funktion af Z

```

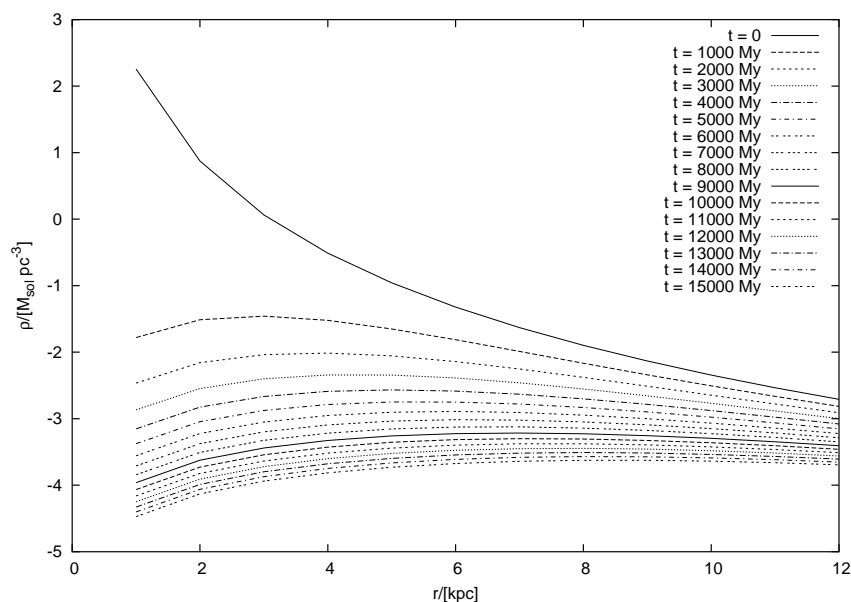
reset
set xlabel 'Z'
set ylabel 'Andel af stjerner i %'

plot "Zfordel" u 1:2 w boxes

set terminal postscript eps enhanced
set output "Z_proc.eps"
replot
set terminal x11

```

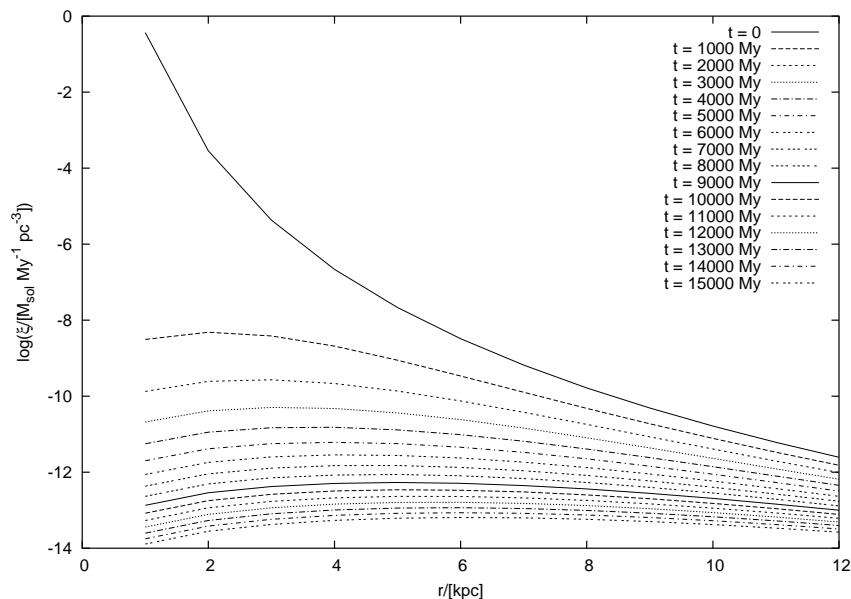
4 Resultater



Figur 1: Logaritmen til gastætheden ρ som funktion af afstand r fra galaksens centrum

Fig. 1 viser med én graf for hver 1000 My, hvorledes ρ aftager ud gennem galaksens symmetriplan. Det er nødvendigt at tage logaritmen til ρ , da densiteten i starten er meget større end til de efterfølgende tidspunkter. Densiteten falder hurtigt i starten og hurtigst ind mod centrum, hvilket må

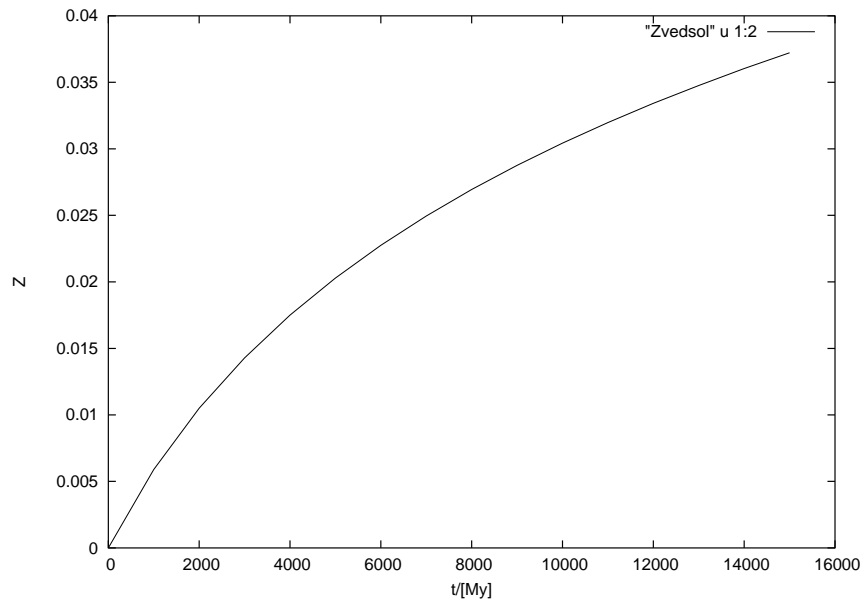
forventes, da stjernerne burde dannes hurtigt her, netop som følge af den høje densitet. Det ses endvidere, at densiteten efterhånden som tiden går udlignes til at have næsten samme værdi overalt. Dette resultat bekræftes af Fig. 2,



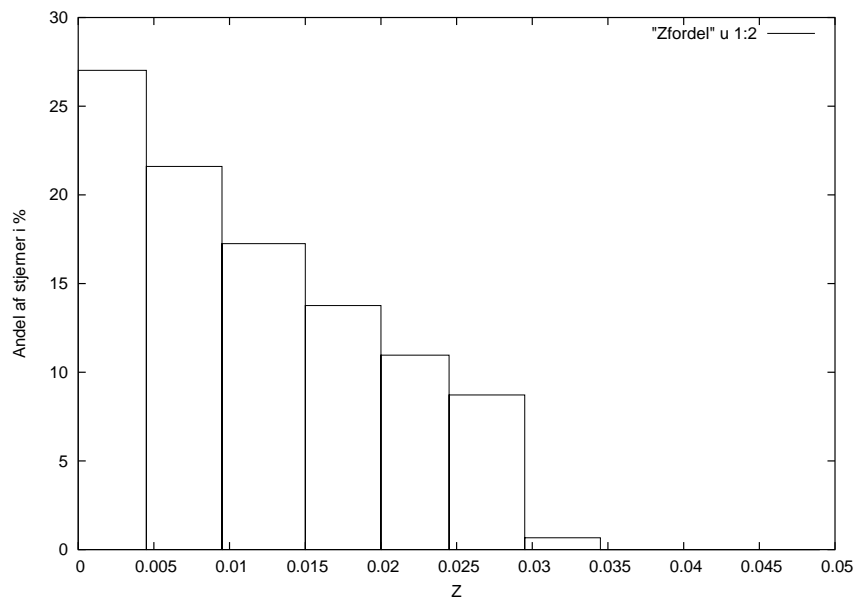
Figur 2: Logaritmen til stjernedannelsesraten ξ som funktion af afstanden r fra galaksens centrum.

som viser, hvor hurtigt stjernerne dannes ud gennem galaksens plan. Igen er det nødvendigt at afbilde ξ logaritmisk, da stjernerne dannes meget hurtigt i begyndelsen og inde mod centrum. Efter de 15 000 My, som vi fremskriver vores system til, er stjernedannelsesraten meget lav ($\sim 10^{-14} M_{\odot} \text{My}^{-1} \text{pc}^{-3}$) og stort set konstant overalt.

Ifølge disse resultater skulle man forvente, at vi efter passende lang tid ender med have flest gamle stjerner i centrum, hvilket stemmer smukt overens med alle observationer; at spiralgalakser har en 'bule' i centrum bestående af mange, gamle stjerner, omgivet af en skive med færre og yngre stjerner. På Fig. 3 ses, hvordan indholdet af metaller øges med tiden. Antager vi, at Solen er 5 mia. år gammel, mens Mælkevejen er 10 mia. år, blev Solen altså dannet, da galaksen var 5 mia. år gammel og burde derfor ifølge grafen bestå af ca. 2% metaller. Dette stemmer smukt overens med spektroskopiske observationer af Solens fotosfære. Fig. 4 viser, hvordan stjerner med et givet Z -indhold vil fordele sig i Solens omegn, når der er gået 10 Gy. Der vil selvfølgelig være flest stjerner med et lavt Z -indhold, da der dannedes flest stjerner, dengang Z var lav, hvilket også bekræftes af grafen. Endvidere ses, at 10-15% af stjernerne har et metalindhold svarende til Solens. Det abrupte fald ved $Z \sim 0.03$ skyldes blot det tidspunkt, vi lige har valgt at fremskrive til.



Figur 3: Det relative indhold af Z af metaller i Solens afstand fra galaksens centrum som funktion af tiden t .



Figur 4: Fordelingen af stjernernes indhold af metaller i Solens omegn, 10 mia. år efter galaksens dannelse.

5 Afsluttende bemærkninger.

Generelt må vi konkludere, at trods den tilsyneladende grove antagelse – at alle stjerner enten er lette og lever evigt eller tunge og dør instantant – frembringer modellen nogle rimeligt fornuftige resultater, hvilket sandsynligvis især hænger sammen med konstanternes initialværdier og – ej at forglemme – den grundige vejledning.

Ville man forbedre selve programmet lidt, kunne man evt. give brugeren mulighed for selv at bestemme størrelsen af tidsskridtene. Da resultaterne imidlertid ikke ændres synderligt ved formindskelse af tidsskridtene (har prøvet), og da modellen alligevel ikke kan bruges til at fremskrive systemet meget længere end de 15 Gy (her vil antagelsen om de evigt levende lette stjerner være for grov), fandt jeg ingen grund til dette.

Metoden til beregning af fordelingen af stjernernes metalindhold kunne også have været lavet smartere. Jeg blev vist en metode af en anden vejleder, der ikke krævede så mange operationer, men lod denne stå, da den er min egen.

6 Vittighed

Med håb om, at mine chancer for at bestå forøges, har jeg copy-pasted denne vittighed fra nettet:

En person uddannet på KU spørger: ”Hvorfor fungerer det?”

En person uddannet på DTU spørger: ”Hvordan fungerer det?”

En person uddannet på Handelshøjskolen spørger: ”Hvad vil det komme til at koste?”

En person uddannet på kunstakademiet spørger: ”Hvad vil du have at drikke til din Big Mac menu?”