Matematisk Analyse

Peter Laursen

18. juli 2005

Indhold

Kurset *Matematisk Analyse* omhandler en række vigtige emner indenfor differentiation, integration samt approksimation af funktioner. Det antages, at de basale regler for differentiation og integration kendes, ellers vil der være mulighed for stille spørgsmål i klassetimerne.
Beståelse af kurset kræver løsning af mindst 80% af de i kompendiet stillede opgaver, aflevering og godkendelse af det afsluttende projekt, samt diverse mindre ydelser for læreren.

1 Differentiation

1.1 Kædereglen

Kædereglen bruges, når vi skal differentiere en (ydre) funktion, der afhænger af en anden (indre) funktion, med hensyn til den indre funktions argument[1]. Hvis altså y er en funktion af x, dvs. hvis

$$y = y(x), \tag{1}$$

mens $x = x(t)$, er den afledte af y mht. t

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{dx}{dt}, \tag{2}$$

hvor $\partial y/\partial x$ er den *partielt afledte* af y mht. x, og vistnok mest udtrykker matematikernes behov for konstant at opfinde nye, sofistikerede tegn.

Eksempel

Differentier funktionen $y = \sqrt{\ln t}$.

Funktionen skrives som

$$y = \sqrt{x}; \quad x = \ln t, \tag{3}$$

og ifølge (2) er da

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x} \cdot \frac{d}{dt}\ln t \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{t} \\ &= \frac{1}{2t\sqrt{\ln t}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Eksempel

Differentier funktionen $y = \sin \omega t$.

Funktionen skrives som

$$y = \sin x; \quad x = \omega t, \tag{5}$$

og vi har det velkendte resultat, at

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x}\sin x \cdot \frac{d}{dt}\omega t \\ &= \cos x \cdot \omega \\ &= \omega \cos \omega t. \end{aligned} \tag{6}$$

Kædereglen kan udvides til vilkårligt mange 'indre' funktioner. Hvis f.eks.

$$y = y(x), \;\; x = x(z), \;\; z = z(u), \;\; \text{og } u = u(t), \tag{7}$$

er

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}. \tag{8}$$

Eksempel

Differentier funktionen $y = \psi e^{i\omega t + \phi}$.

Funktionen skrives som

$$y = \psi x; \quad x = e^z; \quad z = u + \phi; \quad u = i\omega t, \tag{9}$$

[1] Altså den variable, som den indre funktion afhænger af.

og ifølge (8) er da

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x}\psi x \cdot \frac{\partial}{\partial z} e^z \cdot \frac{\partial}{\partial u}(u+\phi) \cdot \frac{d}{dt} i\omega t \\
&= \psi \cdot e^z \cdot 1 \cdot i\omega \\
&= i\omega\psi e^{i\omega t+\phi}. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Eksempel
Differentier funktionen $y = k\cos^2 \omega t$.
Funktionen skrives som

$$y = kx; \quad x = z^2; \quad z = \cos u; \quad u = \omega t, \qquad (11)$$

og vi har, at

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x} kx \cdot \frac{\partial}{\partial z} z^2 \cdot \frac{\partial}{\partial u} \cos u \cdot \frac{d}{dt}\omega t \\
&= k \cdot 2z \cdot (-\sin u) \cdot \omega \\
&= k \cdot 2\cos \omega t \cdot (-\sin \omega t) \cdot \omega \\
&= -2k\omega \cos \omega t \sin \omega t \\
&= -k\omega \sin 2\omega t \qquad (12)
\end{aligned}$$

1.1.1 Problemer

Find den afledte dy/dt af følgende udtryk:

1. $y = (2t-7)^4$
2. $y = \frac{1}{3t+5}$
3. $y = (5t+1)^2(t-3)^3$
4. $y = \frac{(8+3t^4)}{\frac{1}{2}t^2+6}$
5. $y = \sin^3 t$
6. $y = C\frac{1}{e^{h\nu/kt}-1}$

1.2 En anvendelse af kædereglen

Betragt en sfærisk lemming, der pustes op. Dens volumen V og dens radius r ændrer sig da med tiden t, og ændringen i voluminet med tiden er

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt}. \qquad (13)$$

Antag, at lemmingens radius vokser med 0.2 cm s^{-1} på et tidspunkt, hvor $r = 5$ cm. Hvor hurtigt vokser da lemmingens volumen på dette tidspunkt?
Eftersom

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \qquad (14)$$

er

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 4\pi r^2. \qquad (15)$$

Ifølge kædereglen er da

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=5\ \mathrm{cm}} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} = 4\pi(5\ \mathrm{cm})^2(0.2\,\mathrm{cm\ s^{-1}}) = 62.8\ \mathrm{cm^3\ s^{-1}}. \qquad (16)$$

1.2.1 Problem

En lemming kastes i vandet og frembringer en cirkulær bølgefront, der udbreder sig på vandets overflade. Antag, at cirklens radius vokser med 5 cm s^{-1}. Med hvilken hastighed vokser dens areal, når radius er 1 m?

1.3 Kædereglen for funktioner af flere variable

Hidtil har vi kun beskæftiget os med funktioner, der afhænger af en enkelt variabel. Hvis en funktion afhænger af flere (mellemliggende) variable, der igen afhænger af én uafhængig variabel, findes den samlede afledede af funktionen mht. til denne uafhængige variabel på følgende måde: Lad f være en funktion af x og y, dvs. $f = f(x, y)$, og lad x og y være funktioner af den samme uafhængige variable t, dvs. $x = x(t)$ og $y = y(t)$. Da er

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \qquad (17)$$

Denne regel kan naturligvis udvides til at gælde et vilkårligt antal variable, hver især afhængige af et vilkårligt antal variable.

Eksempel

Lad $f = e^{xy}$, hvor $x = t^2$, og $y = t^3$. Da er

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy},\ \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy},\ \frac{dx}{dt} = 2t,\ \text{og}\ \frac{dy}{dt} = 3t^2. \qquad (18)$$

Ifølge (17) er da

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= (ye^{xy})(2t) + (xe^{xy})(3t^2) \\ &= (t^3e^{t^5})(2t) + (t^2e^{t^5})(3t^2) \\ &= 2t^4e^{t^5} + 3t^4e^{t^5} \\ &= 5t^4e^{t^5}. \end{aligned} \qquad (19)$$

Hvis ikke det var fordi dette eksempel skulle illustrere den multivariable kæderegel, kunne vi have opnået samme resultat ved blot at indse, at $f(x, y) = e^{t^5}$, og dernæst differentiere f som en funktion af den ene variable t. Men dette kan kun lade sig gøre, fordi funktionerne $x(t)$ og $y(t)$ kendes eksplicit. Nogle gange kendes kun den *numeriske værdi* af x og y og/eller deres ændring til et givet tidspunkt. Da kan ligning (8) bruges til af finde den numeriske ændring i f til dette tidspunkt.

Eksempel

Betragt en cylindrisk isblok, der står i solen. Fordi det er middag, og vi befinder os i Sydspanien, formindskes dens højde h hurtigere end dens radius r. Hvis højden aftager med 3 cm i timen, og radius aftager med 1 cm i timen, når $h = 40$ cm og $r = 15$ cm, hvor hurtigt ændres da isblokkens volumen i dette øjeblik?

Eftersom

$$V(r, h) = \pi r^2 h, \qquad (20)$$

er

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt} \\
&= 2\pi r h \frac{dr}{dt} + \pi r^2 \frac{dh}{dt} \\
&= 2\pi(15\ \mathrm{cm})(40\ \mathrm{cm})(-1\ \mathrm{cm\ h^{-1}}) + \pi(15\ \mathrm{cm})^2(-3\ \mathrm{cm\ h^{-1}}) \\
&= -1875\pi\ \mathrm{cm^3\ h^{-1}} \\
&\approx -5890\ \mathrm{cm^3\ h^{-1}}. \qquad (21)
\end{aligned}$$

1.3.1 Problemer

I problem 1 til 5, find df/dt både ved brud af kædereglen *og* ved først at udtrykke f eksplicit som en funktion af t før differentiationen. Sammenlign resultaterne.

1. $f = e^{-x^2-y^2};\ x = t,\ y = \sqrt{t}$
2. $f = \frac{1}{x^2+y^2};\ x = \cos 2t,\ y = \sin 2t$
3. $f = \sin xyz;\ x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$
4. $f = \ln(x+y+z);\ x = \cos^2 t,\ y = \sin^2 t,\ z = t^2$
5. $f = e^x + y^3 + \sin 5z;\ x = 2t,\ y = t^2+4,\ z = 3^t$
6. Voluminet V og trykket p af n mol ideel gas tilfredsstiller, som du ved, du smukke skovtrold, ligningen
$$pV = nRT, \qquad (22)$$
hvor T er temperaturen og $R = 0.082$ L atm K^{-1} mol^{-1}. Betragt en mængde gas, der har et volumen på 10 L ved et tryk på 2 atm og en temperatur på 300 K. Hvis trykket stiger med 1 atm i minuttet, og temperaturen stiger med 10 K i minuttet, vil gassens volumen da vokse eller aftage? Hvor hurtigt?
7. Lemminger vandrer gerne ud over en skrænt. Hvis der ikke er vand for neden, lander de i bunke. Efterhånden som der kommer flere til, tager bunken form af en kegle. Antag, at lemmingedyngens højde vokser 0.4 fod i minuttet, og dens bund-radius vokser 0.7 fod i minuttet, når den har en højde på fem fod og en grundradius på 2 fod. Hvor hutigt vokser på dette tidspunkt bunkens volumen?

2 Integration

2.1 Partiel integration

Partiel integration benyttes, når *integranden*, dvs. den funktion, der skal integreres, kan skrives som et produkt af to funktioner f og g. Lad funktionen $f = f(x)$ have stamfunktionen $F(x)$, dvs. $dF/dx = f(x)$, og lad $dg/dx \equiv g'(x)$. Da er

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = [F(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)\, g'(x)\, dx \tag{23}$$

Eksempel
Evaluer integralet $\int_0^1 xe^{2x} dx$.
Eftersom den afledede af x mht. x er 1, er det en fordel at sætte $f(x) = e^{2x}$ og $g(x) = x$. Ifølge (23) er da

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^{2x} dx &= \left[\frac{1}{2}e^{2x} \cdot x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 1\, dx \\
&= \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{4}.
\end{aligned} \tag{24}$$

2.1.1 Problemer

Evaluér integralerne:

1. $\int_0^1 xe^{-x}\, dx$
2. $\int_0^{\pi/2} x \sin x\, dx$
3. $\int_1^e x^3 \ln x\, dx$
4. $\int_0^\pi x \cos 3x\, dx$

2.2 Integration ved substitution

Når integranden er på den tilsyneladende uoverskuelige form $f(g(x)) \cdot g'(x)$, kan det være nyttigt at integrere ved hjælp af *substitution*. Hvis vi sætter $u = g(x)$, er $du = g'(x)\, dx$, og

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(u)\, du, \tag{25}$$

hvilket ser mere overskueligt ud.
Eksempel
Bestem integralet

$$\int x^2 \sqrt{x^3 + 9} dx. \tag{26}$$

Observér først, at leddet x^2, bortset fra en konstant faktor, er den afledede af $x^3 + 9$. Sæt

$$u = x^3 + 9, \tag{27}$$

hvorved

$$du = 3x^2 dx. \tag{28}$$

Den konstante faktor kan fixes, hvis vi kompenserer ved at multiplicere integralet med 1/3:

$$\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{x^3+9}dx &= \frac{1}{3}\int (x^2+9)^{1/2} 3x^2 dx \\
&= \frac{1}{3}\int u^{1/2} du \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C \\
&= \frac{2}{9}(x^2+9)^{3/2} + C.
\end{aligned} \tag{29}$$

2.2.1 Problemer

Evaluér de ubestemte integraler. I problem 1 til 3 er indikeret et foreslag til en substitution.

1. $\int (5x-3)^7 dx;\quad u = 5x-3$
2. $\int \cos 2x\, dx;\quad u = 2x$
3. $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{5+2\sin 3x}} dx;\quad u = 5 + 2\sin 3x$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{3x-5}} dx$
5. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
6. $\int (2+x^2)(6t+t^3)^{1/3} dx$

Hvis integralet er bestemt, skal man huske også at ændre grænserne:

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du. \tag{30}$$

Eksempel
Evaluér integralet

$$\int_0^r \frac{x}{(z^2+x^2)^{3/2}} dx. \tag{31}$$

Foretag substitutionen

$$u = z^2 + x^2 \quad\Rightarrow\quad dx = \frac{1}{2x} du. \tag{32}$$

Den nedre og den øvre grænse bliver da henholdsvis

$$u(0) = z^2 \quad \text{og} \quad u(r) = z^2 + r^2, \tag{33}$$

hvorfor integralet bliver

$$\begin{aligned}
\int_{z^2}^{z^2+r^2} \frac{x}{u^{3/2}}\frac{1}{2x} du &= \frac{1}{2}\int_{z^2}^{z^2+r^2} u^{-3/2} du \\
&= \frac{1}{2}\left[-2u^{-1/2}\right]_{z^2}^{z^2+r^2} \\
&= -(z^2+r^2)^{-1/2} + (z^2)^{-1/2} \\
&= \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}.
\end{aligned} \tag{34}$$

2.2.2 Problemer

Evaluér de bestemte integraler:

1. $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^3}$
2. $\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}} dx$
3. $\int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta$
4. $\int_0^{\pi/2} (1+3\sin\theta)^{3/2} \cos\theta d\theta$

3 Taylorudvikling

Taylorudvikling eller -ekspansion bruges til at approksimere en funktion $f = f(x)$ for værdier af x i nærheden af en given værdi $x = a$. Taylors formel siger, at enhver funktion $f(x)$ kan skrives som følgende uendelige sum:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a), \tag{35}$$

hvor $f^{(n)}(a) \equiv d^n f/dx^n|_{x=a}$ er den n'te afledede af f mht. x, evalueret i punktet $x = a$.
Leddet $1/n!$ går temmelig hurtigt mod nul for $n \to \infty$, så alt efter, hvor god en approksimation man er interesseret i, kan man medtage færre eller flere led. Ofte er man interesseret i en funktionsværdi for små værdier af x, dvs. for $x \approx 0$. Det vil da være naturligt at udvikle omkring værdien $a = 0$, hvorved Taylors formel får udseendet

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0). \tag{36}$$

Eksempel
Hvad er funktionsværdien af$\sin x$ for små værdier af x?.
Ved brug af (36) får vi, at

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sum \frac{x^n}{n!} \sin^{(n)}(0) \\
&= \frac{x^0}{0!}\sin(0) + \frac{x^1}{1!}\cos(0) + \frac{x^2}{2!}(-\sin(0)) + \frac{x^3}{3!}(-\cos(0)) + \cdots \\
&= \frac{1}{1}\cdot 0 + \frac{x}{1}\cdot 1 - \frac{x^2}{2}\cdot 0 - \frac{x^3}{3!}\cdot 1 + \cdots \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.
\end{aligned} \tag{37}$$

Vi siger, at for små x er $\sin x \approx x$, eller at $\sin x = x$ *til anden orden*, altså hvis vi medtager led til og med[2] $n = 2$. Til tredje orden er $\sin x = x - x^3/6$, men hvis f.eks. $x = 0.1$, er forskellen på de to udtryk for $\sin x$ kun $(0.1)^3/6 = 0.00017$, dvs. en relativ forskel på under 2%, hvilket i de fleste tilfælde kan ignoreres.

3.0.3 Problemer

Approksimér funktionerne 1 til 4 til første orden:

1. $\cos x$
2. e^x
3. e^{-x}
4. $\frac{1}{1+x}$

Skriv de første fem-seks Taylor-led ned for funktionerne 5 til 9:

1. $\cos x$
2. e^x

[2]Hvilket altså er det samme som til første orden, idet andenordensleddet jo er nul

3. e^{-x}
4. $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
5. $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
6. Vis, hvorfor den sidste lighed i ligning (12) gælder.

4 Afsluttende projekt

Et *sort legeme* er defineret som et objekt, der hverken reflekterer eller spreder indfaldende stråling, men absorberer og re-emitterer stråling fuldstændigt. Et sort legeme er en slags ideel radiator, som ikke kan eksistere i virkeligheden, men mange objekter kommer meget tæt på, f.eks. stjerner. Et sort legemes udstråling afhænger udelukkende af dets temperatur og er fuldstændig uafhængig af dets form, materiale og opbygning. Udstrålingen er fordelt på alle mulige frekvenser, og fordelingen er givet ved Plancks lov, som siger, at intensiteten B_ν, dvs. den energi, der strømmer ud gennem legemet pr. tid pr. areal [3], ved en frekvens ν fra et sort legeme med temperaturen T er

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}, \tag{38}$$

eller i termer af bølgelængden $\lambda = c/\nu$

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^2}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}, \tag{39}$$

hvor h er Plancks konstant, c er lysets hastighed, og k er Boltzmanns konstant.

4.1 Wiens forskydningslov

Brug differentiation til at vise *Wiens forskydningslov*

$$\lambda_{max}T = b, \tag{40}$$

hvor λ_{max} er den bølgelængde, ved hvilken et sort legemes intensitet er størst, og $b = 0.0029$ K m er Wiens forskydningskonstant.

4.2 Stefan-Boltzmanns lov

Benyt, at

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx = \frac{\pi^4}{15}, \tag{41}$$

til at vise, at den totale udstråling fra et sort legeme med temperaturen T er

$$B(T) = AT^4, \tag{42}$$

hvor

$$A = \frac{2k^4}{c^2h^3}\frac{\pi^4}{15}. \tag{43}$$

Stefan-Boltzmanns lov siger, at fluxen fra det sorte legeme er $F = \pi B$, eller

$$F = \sigma T^4, \tag{44}$$

hvor $\sigma = \pi A = 5.67 \times 10^{-8}$ J s^{-1} m^{-2} K^{-4} er Stefan-Boltzmanns konstant.

4.3 Rayleigh-Jeans approksimation

For bølgelængder meget større end λ_{max} er $\lambda kT \gg hc$. Approksimér Plancks lov i dette tilfælde til første orden. Resultatet kaldes *Rayleigh-Jeans approksimation*, og er meget anvendeligt i radioastronomi.

[3] Egentlig J s^{-1} m^{-2} Hz^{-1} sterad^{-1}.